OŚRODKI JEDNOSKŁADNIKOWE

6. MATERIAŁ

W różniczkowych **równaniach bilansu masy, pędu i energii wewnętrznej** i **entropii** występują niewiadome:

- gęstość masy $\rho(\mathbf{x},t)$,
- prędkość $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$,
- tensor naprężeń $\mathbf{T}(\mathbf{x},t)$,
- właściwa energia wewnętrzna $u(\mathbf{x},t)$,
- strumień ciepła $\mathbf{q}(\mathbf{x},t)$,
- temperatura $T(\mathbf{x},t)$,

których liczba jest większa od liczby równań.

Należy zatem wyznaczyć dodatkowe równania opisujące właściwości materiałowe ośrodka, zwane **równaniami konstytutywnymi** (**tworzącymi**, **fizycznymi, materiałowymi**).

Równania te wiążą **zmienne konstytutywne** (zmienne zależne) $\mathbf{T}$, u i $\mathbf{q}$ z **argumentami konstytutywnymi** (zmiennymi niezależnymi) ρ, $\mathbf{v}$ i T.

Ponieważ nie istnieje ogólna teoria fizyczna, którą można wykorzystać przy konstruowaniu związków konstytutywnych, zatem ich postać określamy na podstawie **modelowania** opartego na **badaniach eksperymentalnych**.

Równania konstytutywne powinny:

- być **niesprzeczne** z zasadami zachowania oraz zasadą wzrostu entropii;

- być **niezmiennicze** przy zmianie:

  - **obserwatora**,
  - **układu współrzędnych**,
  - **układu jednostek pomiarowych**;

- spełniać **postulaty**:

  - **determinizmu** (właściwości materiału zależą od jego historii),
  - **lokalności** (na właściwości materiału w danym punkcie mają wpływ oddziaływania z jego najbliższego otoczenia),
  - **współobecności** (wszystkie zmienne konstytutywne powinny zależeć o tego samego zbioru argumentów konstytutywnych, chyba że wykluczają to inne prawa fizyki).

Konstruowanie równań konstytutywnych jest zagadnieniem trudnym i wiążę się ściśle z badaniami eksperymentalnymi (zazwyczaj żmudnymi i kosztownymi) i ich uogólnieniami.

Aby pokazać, jakiego typu ograniczenia na związki konstytutywne nakłada nierówność wzrostu entropii, rozważmy proces przenoszenia energii w sztywnym przewodniku ciepła, w którym nie występuje źródło ciepła.

W takim przypadku równanie bilansu energii wewnętrznej przyjmuje postać

$$\rho \dot{u} = -\nabla \cdot \mathbf{q}$$

natomiast zasada wzrostu entropii jest określona nierównością CLAUSIUSA-DUHEMA w postaci zredukowanej

$$\rho T\dot{s} \geq \rho\dot{u} + \frac{\mathbf{q}\cdot\nabla T}{T}$$

gdzie, w celu uproszczenia rozważań, wykorzystujemy pochodne materialne

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla u$$
$$\dot{s} = \frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla s$$

Aby równanie bilansu energii wewnętrznej można było wykorzystać do wyznaczenia rozkładu temperatury T w rozpatrywanym ośrodku, musimy znać zależność energii wewnętrznej u i strumienia ciepła $\mathbf{q}$ od tego rozkładu.

Odpowiednie związki konstytutywne muszą dodatkowo spełniać ograniczenie nakładane przez nierówność CLAUSIUSA-DUHEMA, w przypadku której musimy również określić zależność entropii s od rozkładu temperatury.

Przyjmijmy, że związki konstytutywne określające postać funkcji skalarnych u i s zdefiniowane są funkcjami

$$u = u(T)$$

$$s = s(T)$$

natomiast związek fizyczny określający postać wektora $\mathbf{q}$ dany jest relacją

$$\mathbf{q} = -k(T)\nabla T$$

gdzie k jest współczynnikiem przewodnictwa cieplnego.

Z postaci powyższych funkcji wynikają związki

$$\dot{u}(T) = \frac{\partial u}{\partial T}\dot{T}$$
$$\dot{s}(T) = \frac{\partial s}{\partial T}\dot{T}$$

które po podstawieniu wraz z zależnością określającą strumień ciepła do nierówności wzrostu entropii przekształcają ją do następującej postaci:

$$\rho\left(T\frac{\partial s}{\partial T} - \frac{\partial u}{\partial T}\right)\dot{T} + k(T)\frac{\nabla T \cdot \nabla T}{T} \geq 0$$

Ponieważ powyższa nierówność jest liniowa względem pochodnej temperatury $\dot{T}$, zatem otrzymujemy z niej zależność wiążącą entropię i energię wewnętrzną

$$T\frac{\partial s}{\partial T} = \frac{\partial u}{\partial T}$$

oraz **nierówność rezydualną**

$$k(T)\frac{\nabla T \cdot \nabla T}{T} \geq 0$$

z której wynika dość oczywisty wniosek, że $k \geq 0$.

Wprowadzając energię swobodną

$$f = u - Ts$$

oraz wykorzystując powyższy związek między pochodnymi energii wewnętrznej i entropii dostajemy użyteczne zależności

$$s = -\frac{\partial f}{\partial T}$$
$$u = f - T\frac{\partial f}{\partial T}$$

Z powyższych zależności wynika, że jeśli potrafimy określić związek konstytutywny w przypadku energii swobodnej, to bez problemu możemy wyznaczyć związki konstytutywne określające energię wewnętrzną i entropię.

Na zakończenie warto podkreślić, że zagadnienie modelowania cech materiałowych ośrodka nie jest problemem łatwym, zaś podane postulaty, na których możemy oprzeć konstrukcję tych równań, mają ograniczoną stosowalność.