OŚRODKI JEDNOSKŁADNIKOWE

4. ENERGIA

Energia występuje w różnych postaciach (np. jako energia **elektryczna**, **magnetyczna**, **chemiczna**, **sprężystości**, **jądrowa** itd.), które są zazwyczaj bardzo od siebie odmienne.

4.1. KLASYFIKACJA ENERGII

TABELA 4.1
Klasyfikacja energii

Energia	Zewnętrzna	Wewnętrzna
Kinetyczna	Ruchu	Ruchu cieplnego
Potencjalna	Oddziaływań dalekiego zasięgu	Oddziaływań bliskiego zasięgu

- Energia **ruchu** – energia makroskopowego ruchu ciała.
- Energia **ruchu cieplnego** – energia chaotycznego ruchu jego atomów i molekuł.
- Energia **oddziaływań dalekiego zasięgu** – energia grawitacji i energia elektromagnetyczna.
- Energia **oddziaływań bliskiego zasięgu** – energia wiązań (energia sprężystości, energia chemiczna, energia jądrowa).

Fizyka budowli wykorzystuje **bilans energii wewnętrznej** (**bilans energii w postaci zredukowanej**) będący podstawą wszelkiego rodzaju wariantów równania przepływu ciepła.

4.2. PRZEMIANY ENERGII

Rozmaite postacie energii mogą ulegać **przemianom** (**konwersjom**), przy czym **energia całkowita** (suma energii cząstkowych różnego rodzaju) zawsze **pozostaje niezmienna**.

Bilans energii całkowitej przed rozpoczęciem dowolnego procesu i po jego zakończeniu daje taki sam wynik ilościowy, przy czym w bilansie końcowym, wskutek strat energetycznych, część energii wystąpi pod postacią **energii ruchu cieplnego**.

Energia ruchu cieplnego zwiększa **temperaturę** ciała i jego otoczenia, skąd ulega **rozproszeniu** w przestrzeń w postaci promieniowania podczerwonego (cieplnego).

TABELA 4.2
Konwersje energii wewnętrznej

Energia	K	G	E	W
Kinetyczna (K)	–	tak	tak	tak
Grawitacji (G)	tak	–	nie	nie
Elektromagnetyczna (E)	tak	nie	–	tak
Wewnętrzna (W)	tak	nie	tak	–

4.3. GĘSTOŚĆ ENERGII WEWNĘTRZNEJ

Energia wewnętrzna U [J] dowolnej części ośrodka wypełniającego pewien dowolny obszar przestrzeni jest funkcją jej masy m

$$U = U(m)$$

czyli

$$dU = u\,dm = \rho u\,dV \rightarrow \psi = \rho u$$

u – **gęstość** masowa **energii wewnętrznej** [J/kg].

4.4. BILANS ENERGII WEWNĘTRZNEJ

Molekularne przenoszenie energii wewnętrznej nazywamy **przewodzeniem ciepła**. **Strumień cieplny** Q [W] przepływający przez dowolną płaszczyznę poprowadzoną wewnątrz ośrodka o wektorze normalnym $\mathbf{n}$ jest funkcją pola jej powierzchni A

$$Q = Q(A)$$

czyli

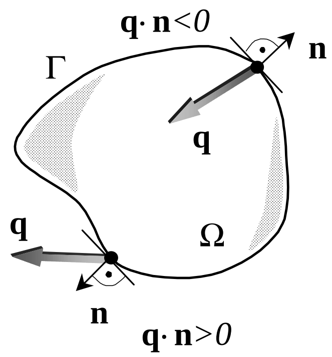
$$dQ = q(\mathbf{n})dA$$

q – **gęstość strumienia cieplnego** [W/m^2].

Zgodnie z założeniem **FOURIERA**

$$q(\mathbf{n}) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}_u^{mo} = \mathbf{q}$$

$\mathbf{q}$ – **wektor gęstości strumienia cieplnego** [W/m^2].



Rys. 4.1. Wektor gęstości strumienia ciepła

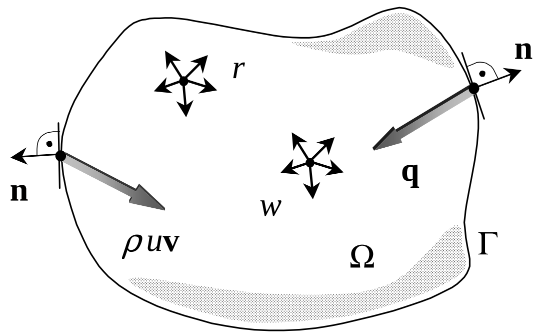
Ponieważ energia wewnętrzna podlega konwersji z energią elektromagnetyczną i kinetyczną, zatem w ośrodku wystąpią dwa źródła

$$\sigma_u^{ex} = r$$

$$\sigma_u^{in} = \mathrm{tr}\left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\right)$$

r – **gęstość zewnętrznego źródła ciepła** (ciepło wydzielane wskutek polaryzacji i namagnesowania cząstek) [W/m^3].

$\mathrm{tr}\left(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}\right)$ – **gęstość mocy naprężeń wewnętrznych** (ciepło wydzielane wskutek pokonywania oporów przepływu materii w ośrodku oraz jego odkształceń, np. przy zginaniu pręta) [W/m^3].



Rys. 4.2. Strumienie i źródła energii wewnętrznej

Podstawiając powyższe zależności oraz $\psi = \rho u$ do równania

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \psi \mathbf{v} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\psi}^{mo} + \sigma_{\psi}^{ex} + \sigma_{\psi}^{in}$$

otrzymujemy **różniczkowe** (**lokalne**) **równanie bilansu energii wewnętrznej**

$$\boxed{\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u \mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{q} + r + \mathrm{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D})}$$

zwane **bilansem energii w postaci zredukowanej**.

Ponieważ **energia wewnętrzna**, będąca częścią składową energii całkowitej, **nie musi być zachowana**, dlatego też w powyższym równaniu występują jej źródła, będące miarą szybkości jej produkcji kosztem energii kinetycznej i elektromagnetycznej.

Korzystając z zależności

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}=u\frac{\partial \rho}{\partial t}+\rho\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot(\rho u\mathbf{v})=u\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})+\rho\mathbf{v}\cdot\nabla u$$

otrzymujemy

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho u\mathbf{v})$$

$$=u\left[\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\right]+\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla u\right)$$

skąd, po uwzględnieniu równania bilansu masy, dostajemy równanie **FOURIERA-KIRCHHOFFA-NEUMANA**

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla u\right)=-\nabla\cdot\mathbf{q}+r+\mathrm{tr}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{D})$$

4.4. PRAWO FOURIERA

Równanie fizyczne opisujące przewodzenie ciepła w ośrodku ciągłym określa **prawo FOURIERA**

$$\mathbf{q}=\mathbf{q}(T,\nabla T)=-k(T)\nabla T$$

T – **temperatura** [K],
k – **współczynnik przewodzenia ciepła** [W/(m·K)].

Powyższe równanie dobrze opisuje przewodzenie ciepła w spotykanych w zagadnieniach fizyki budowli **termicznie izotropowych** ośrodkach ciągłych (większość materiałów budowlanych, powietrze, para wodna i woda), przy temperaturze jaka może wystąpić w przegrodzie budowlanej, bądź też w jej otoczeniu.

4.5. RÓWNANIE PRZENOSZENIA CIEPŁA

4.5.1. Sztywny przewodnik ciepła

W przypadku **sztywnego przewodnika ciepła** (ośrodka nieodkształcalnego) $\mathrm{tr}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{D})\equiv 0$ i równanie FOURIERA-KIRCHHOFFA-NEUMANA przyjmuje postać

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla u\right)=-\nabla\cdot\mathbf{q}+r$$

Ponieważ w takim przypadku

$$u=u(T)$$

zatem

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t}=c_v\frac{\partial T}{\partial t}$$
$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial T}\nabla T=c_v\nabla T$$

gdzie

$$c_v=\frac{\partial u}{\partial T}$$

jest **ciepłem właściwym** ośrodka przy stałej objętości, [J/(kg·K)].

Powyższe zależności oraz prawo FOURIERA pozwalają sprowadzić równanie FOURIERA-KIRCHHOFFA-NEUMANA do **równania przewodzenia ciepła**

$$\boxed{\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot \left(k \nabla T \right) + r}$$

opisującego rozkład temperatury w nieodkształcalnym ośrodku ciągłym.

W przypadku $\mathbf{v} = 0$ powyższe równanie przyjmie postać

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot \left(k \nabla T \right) + r$$

z której wynika klasyczne **równanie FOURIERA**

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(a \nabla T \right) + r}$$

gdzie

$$a = \frac{k}{\rho c_v}$$

jest **współczynnikiem wyrównywania temperatury** [m^2/s].

4.5.2. Przenoszenie ciepła w płynach

W przypadku **płynów** (cieczy i gazów) **rzeczywistych** (**lepkich**) tensor naprężeń można przedstawić w postaci

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \mathbf{S}$$

p – **ciśnienie** [Pa],

$\mathbf{I}$ – **tensor jednostkowy**.

W takim przypadku

$$\mathrm{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathrm{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D})$$

$p\nabla \cdot \mathbf{v}$ – **moc naprężeń izotropowych** (ciśnieniowych),

$\mathrm{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D})$ – **moc naprężeń lepkich** (tarcie wewnętrzne, lepka dyssypacja).

W przypadku **płynów idealnych** (**nielepkich**) $\mathrm{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}) \equiv 0$ i w konsekwencji $\mathrm{tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{D}) = -p\nabla \cdot \mathbf{v}$.

Powyższa zależność pozwala zapisać równanie FOURIERA-KIRCHHOFFA-NEUMANA w postaci

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla u\right) = -\nabla \cdot \mathbf{q} - p\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathrm{tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{D}) + r$$

Wprowadzając **entalpię właściwą** [J/kg]

$$h \equiv u + p/\rho$$

w przypadku której

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial t} - \frac{p}{\rho^2}\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$\nabla h = \nabla u + \frac{1}{\rho}\nabla p - \frac{p}{\rho^2}\nabla \rho$$

oraz wykorzystując równanie bilansu masy sprowadzamy powyższe równanie do następującej postaci:

$$\rho\left(\frac{\partial h}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla h\right) = -\nabla\cdot\mathbf{q} + \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla p + \mathrm{tr}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{D}) + r$$

Ponieważ

$$h = h(T, p)$$

oraz

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\nabla h = \frac{\partial h}{\partial T}\nabla T + \frac{\partial h}{\partial p}\nabla p$$

zatem powyższe równanie można zapisać jako

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T\right)$$

$$= \nabla\cdot(k\nabla T) + \beta T\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla p\right) + \mathrm{tr}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{D}) + r$$

W powyższym równaniu

$$c_p = \partial h / \partial T$$

jest **ciepłem właściwym** przy stałym ciśnieniu, [J/(kg·K)

$$\beta \equiv -(\partial \rho / \partial T)/\rho$$

współczynnikiem ekspansji cieplnej [1/K], natomiast

$$\beta T\left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla p\right)$$

mocą kompresji.

Gdyby wykorzystać pochodną materialną, to powyższe równanie miałoby bardziej krótką i zwartą postać

$$\rho c_p \dot{T} = \nabla\cdot(k\nabla T) + \beta T\dot{p} + \mathrm{tr}(\mathbf{S}\cdot\mathbf{D}) + r$$

gdzie

$$\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T$$
$$\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla p$$

Z analizy jednowymiarowego **laminarnego** (**warstwowego**) przepływu płynu lepkiego przez rurę w warunkach normalnych (temperatura pokojowa, ciśnienie atmosferyczne) wynika, że **moc kompresji** generuje gradient temperatury rzędu:

- 10^{-4} K/cm – w przypadku powietrza traktowanego jako gaz idealny,
- 10^{-8} K/cm – w przypadku wody,

zaś **moc naprężeń lepkich** wywołuje gradient temperatury rzędu:

- 10^{-6} K/cm – w przypadku powietrza,
- 10^{-9} K/cm – w przypadku wody.

Z oszacowań tych wynika, że w przypadku problemów przepływu ciepła związanego z makroskopowym ruchem wody i powietrza w przegrodach budowlanych, rozważane człony źródłowe możemy pominąć. W takich przypadkach powyższe równanie redukuje się do ogólnie znanej postaci

$$\boxed{\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\cdot\nabla T\right)=\nabla\cdot\left(k\nabla T\right)+r}$$

W przypadku płynu w stanie bezruchu $\mathbf{v}=0$ powyższe równanie przyjmuje postać

$$\rho c_p\frac{\partial T}{\partial t}=\nabla\cdot\left(k\nabla T\right)+r$$

Równanie to różni się od równania przewodzenia ciepła w sztywnym przewodniku tylko ciepłem właściwym (c_p zamiast c_v).

Ciepła właściwe łączy następujący związek

$$c_p=c_v+T\beta^2/\left(\rho\kappa\right)$$

gdzie $\kappa \equiv (\partial\rho/\partial p)/\rho$ jest **współczynnikiem ściśliwości** [1/Pa].

W przypadku ciał stałych

$$c_p \cong c_v$$

Natomiast w przypadku wody temperaturze pokojowej

$$c_v \cong 0{,}995 c_p .$$

4.5.3. Przypadki szczególne

Jeżeli $a = \mathrm{const}$, to z powyższego równania dostajemy **równanie nieustalonego** (niestacjonarnego) **przewodzenia ciepła**

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\nabla^2 T + r, \quad T = T(\mathbf{x}, t)$$

$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ – operator **LAPLACE'A**.

Równanie to w prostokątnym układzie odniesienia $0xyz$ ma postać

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + r, \quad T = T(x, y, z, t)$$

W przypadku przewodzenia ciepła stacjonarnego (ustalonego w czasie) $\partial T/\partial t \equiv 0$ i bezźródłowego $r = 0$ równanie powyższe redukuje się do **równania LAPLACE'A**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=0, \quad T=T(x,y,z)$$

Jeśli przewodzenie ciepła ma miejsce w **obszarze płaskim** (**dwuwymiarowym**), to w przypadku **niestacjonarnym**

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right), \quad T=T(x,y,t)$$

zaś w **stacjonarnym**

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0, \quad T=T(x,y)$$

W często spotykanym **przypadku liniowym** (**jednowymiarowym**) **niestacjonarnym**

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad T=T(x,t)$$

natomiast w **stacjonarnym**

$$\frac{d^2 T}{dx^2}=0, \quad T=T(x)$$

Z powyższego równania wynika, że rozkład temperatury w rozpatrywanym przypadku jest liniowy

$$T=C_1 x+C_2$$

C_1, C_2 – stałe całkowania.