# OŚRODKI JEDNOSKŁADNIKOWE

# 3. PĘD

## 3.1. KLASYFIKACJA SIŁ

**Siły** wyrażają uogólnioną wymianę rzeczywistych, wzajemnych **oddziaływań** między obiektami materialnymi lub ich częściami.

Siły wywierane na kontinuum materialne spowodowane są działaniem **pól siłowych** na masy i ładunki mikrocząstek materii.

**TABELA 3.1**
**Siły działające na kontinuum materialne**

| **Bliskiego zasięgu** | **Dalekiego zasięgu** | |
|---|---|---|
| Powierzchniowa (kontaktowa) | Objętościowa (elektromagnetyczna) | Masowa (grawitacji) |

## 3.2. GĘSTOŚĆ PĘDU

**Pęd** $\mathbf{p}$ części kontinuum, wypełniającej pewien dowolny obszar przestrzeni, jest funkcją jej masy $m$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(m)$$

Jeżeli funkcja ta jest ciągła, to

$$d\mathbf{p} = \mathbf{v}dm = \rho\mathbf{v}dV$$

$\rho\mathbf{v}$ – **gęstość** (objętościowa) **pędu.**

### 3.3. BILANS PĘDU

**Molekularny strumień pędu** (**siła powierzchniowa**) na płaszczyźnie poprowadzonej wewnątrz ośrodka o wektorze normalnym $\mathbf{n}$ jest funkcją pola $A$ jej powierzchni

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(A)$$

czyli

$$d\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{n})dA$$

$\mathbf{t}$ – **wektor naprężenia** [N/m$^2$].

Można wykazać, że

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \mathbf{T}\cdot\mathbf{n} \rightarrow \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{p}}^{mo} = \mathbf{T}$$

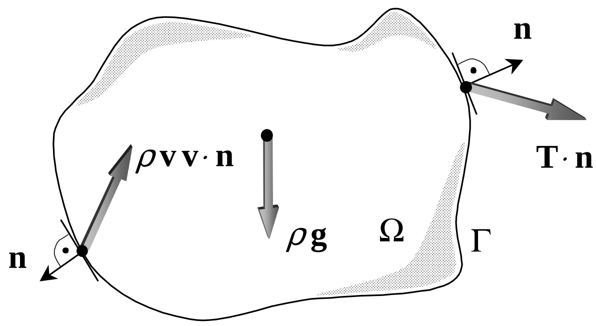
$\mathbf{T}$ – **tensor naprężeń CAUCHY'EGO**.

W przypadku ośrodka jednoskładnikowego

$$\sigma_{\mathbf{p}}^{in} = 0$$

$$\sigma_{\mathbf{p}}^{ex} = \rho\mathbf{g}$$

$\mathbf{g}$ – **przyspieszenie grawitacyjne**.




Rys. 3.1. Strumienie pędu (siły powierzchniowe)
i źródło pędu (siła objętościowa)

Podstawiając powyższe zależności oraz $\psi = \rho \mathbf{v}$ do równania

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \psi \mathbf{v} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\psi}^{mo} + \sigma_{\psi}^{ex} + \sigma_{\psi}^{in}$$

otrzymujemy **różniczkowe** (**lokalne**) **równanie bilansu pędu**

$$\boxed{\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}, \quad \mathbf{T} = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}}$$

Wykorzystując zależności

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} = \mathbf{v} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = \mathbf{v} \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

oraz różniczkowe równanie bilansu masy i pochodną materialną, dostajemy

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}\mathbf{v}) = \rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}\right) = \rho \dot{\mathbf{v}} = \rho \mathbf{a}$$

co pozwala zapisać powyższe równanie w postaci **równania ruchu CAUCHY'EGO**

$$\rho \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{T} + \rho \mathbf{g}$$

Zakładając, że $\mathbf{v} = 0$ i pomijając siłę grawitacji $\mathbf{g} = 0$ dostajemy z powyższego równania **równanie równowagi**

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$$

które, po rozpisaniu względem współrzędnych tensora naprężeń $\mathbf{T}$, przyjmuje znaną z mechaniki postać

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$