OŚRODKI JEDNOSKŁADNIKOWE

2. MASA

2.1. KONTINUUM MATERIALNE

Rzeczywiste obiekty makroskopowe (zbudowane z molekuł i atomów) modelujemy **kontinuum materialnym** (**ośrodkiem ciągłym**).

Kontinuum materialne – ciągły, uporządkowany zbiór nieskończonej liczby **cząstek materialnych**.

Cząstka materialna X – część ośrodka zajmująca w przestrzeni nieskończenie mały obszar i mająca nieskończenie małą masę.

TABELA 2.1
Składniki materii i kontinuum materialnego

Materia		Kontinuum materialne
Molekuły ↓ Atomy ↓		
Jądra ↓ Nukle- ony ↓ Kwarki	Elektrony	Cząstki materialne

Cząstek materialnych nie należy utożsamiać z cząsteczkami materii.

W sensie matematycznym, kontinuum materialne jest ciągłym, uporządkowanym zbiorem nieskończonej liczby elementów dowolnie gęsto upakowanych.

Do analizy właściwości kontinuum wykorzystujemy rachunek różniczkowy i całkowym (matematyczny aparat do badania funkcji ciągłych).

2.2. RUCH KONTINUUM

Makroskopowy ruch (zmiany położenia) cząstki X względem ustalonego punktu odniesienia opisuje funkcja

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(X, t)$$

$\mathbf{x}$ – **punkt** (**miejsce**, **położenie**) w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.

2.2.1. Prędkość

Jeżeli $\mathbf{x}(X, t)$ jest ciągłą funkcją czasu, to

$$d\mathbf{x} = \mathbf{v}\,dt$$

$\mathbf{v}$ – **prędkość** cząstki X.

Prędkość określa zarówno szybkość ruchu, jak i jego kierunek w przestrzeni.

2.2.2. Gradient prędkości

Jeżeli $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ jest ciągłą funkcją położenia, to

$$d\mathbf{v} = \mathbf{L} \cdot d\mathbf{x}$$

$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ – **gradient prędkości** (tensor drugiego rzędu), przy czym

$$\mathbf{L}^{\mathrm{T}} \equiv \nabla \mathbf{v}$$

Gradient prędkości jest miarą przestrzennych zmian prędkości ośrodka ciągłego.

Gradient prędkości możemy przedstawić w postaci sumy

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W}$$

tensora prędkości deformacji

$$\mathbf{D} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{L} + \mathbf{L}^{\mathbf{T}}\right)$$

tensora prędkości obrotu

$$\mathbf{W} = \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{L} - \mathbf{L}^{\mathbf{T}}\right)$$

2.2.3. Przyspieszenie

Jeżeli $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ jest ciągłą funkcją czasu, to

$$d\mathbf{v} = \mathbf{a}\, dt$$

$\mathbf{a}$ – **przyspieszenie** cząstki.

Przyspieszenie jest miarą czasowych zmian prędkości cząstki.

2.2.4. Pochodna materialna

Ponieważ

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}[\mathbf{x}(X,t),t]$$

zatem

$$\dot{\mathbf{v}} \equiv \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$$

$\dot{\mathbf{v}}(X,t)$ – **pochodna materialna**,
$\partial \mathbf{v}(\mathbf{x},t)/\partial t$ – **pochodna lokalna**,
$\mathbf{v} \cdot \nabla$ – **pochodna adwekcyjna**.

Jeżeli w powyższym wzorze zastąpić prędkość funkcją $\psi(\mathbf{x},t)$, to otrzymamy jej **pochodną materialną**

$$\dot{\psi} \equiv \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi$$

Jeśli $\mathbf{v} = 0$ to $\dot{\psi} \equiv d\psi/dt = \partial\psi/\partial t$.

2.3. GĘSTOŚĆ MASY

Masa m części kontinuum, wypełniającej pewien dowolny obszar przestrzeni, jest funkcją jej objętości V

$$m = m(V)$$

Jeżeli funkcja ta jest ciągła, to

$$dm = \rho\, dV$$

ρ – **gęstość** (objętościowa) **masy** [kg/m^3].

Gęstość masy jest miarą niejednorodności rozkładu przestrzennego materii w rozważanym ośrodku.

2.4. BILANS MASY

2.4.1. Różniczkowe równanie bilansu masy

W przypadku ośrodka jednoskładnikowego

$$\boldsymbol{\varphi}_{\rho}^{mo} = 0$$

oraz (masa jest wielkością zachowawczą)

$$\sigma_{\rho}^{ex} + \sigma_{\rho}^{in} = 0$$

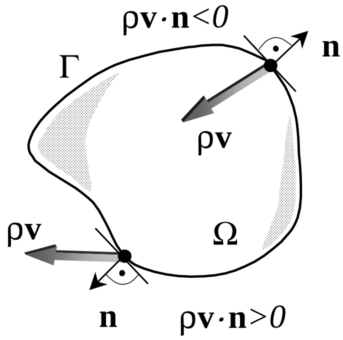
Podstawiając powyższe zależności oraz $\psi = \rho$ do równania

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \psi \mathbf{v} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\psi}^{mo} + \sigma_{\psi}^{ex} + \sigma_{\psi}^{in}$$

otrzymujemy **różniczkowe** (**lokalne**) **równanie bilansu masy** (**równanie ciągłości**)

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0}$$

$\rho \mathbf{v}$ – **strumień** (makroskopowy) **masy**.



Rys. 2.1. Strumień masy

W prostokątnym układzie odniesienia równanie to ma postać

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0$$

v_x, v_y, v_z – współrzędne wektora prędkości.

2.4.2. Przypadki szczególne

Jeśli $\rho=\rho(x)$, to $\partial\rho/\partial t=0$ i w konsekwencji dostajemy **równanie ustalonego przepływu masy**

$$\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0$$

bądź też

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=0$$

Jeśli $\rho = \rho(t)$, wówczas otrzymujemy **równanie przepływu masy w ośrodku jednorodnym**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

lub

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0$$

Natomiast, gdy $\rho = \text{const.}$, to dostajemy **równanie przepływu masy w ośrodku nieściśliwym**

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

albo

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

Powyższe równania określają **warunek nieściśliwości** takiego ośrodka.