1. BILANSOWANIE WIELKOŚCI FIZYCZNYCH

Ośrodki materialne charakteryzują dwa rodzaje różniących się zasadniczo od siebie wielkości fizycznych:

- **globalne** (**ekstensywne**) przypisane obszarowi przestrzeni fizycznej, wypełnionemu przez dowolną część rozważanego ośrodka materialnego; są one proporcjonalne do wielkości tego obszaru (**addytywne**) i zależą tylko od **czasu (**np.: masa i energia);

- **lokalne** (**intensywne**) przypisane punktom tego obszaru; zależą one zarówno od **czasu**, jak i **położenia** rozpatrywanego punktu w przestrzeni, nie zależą natomiast od wielkości obszaru zajętego przez rozważany ośrodek (np. temperatura, ciśnienie i wszelkiego rodzaju **gęstości**: **masowe**, **objętościowe** czy też **powierzchniowe** wielkości globalnych).

Bilansować możemy tylko wielkości globalne, które z uwagi na przypisanie obszarom przestrzeni podlegają **zasadzie superpozycji.**

Wielkości lokalne wprowadzamy w celu opisania rozkładu analizowanych wielkości globalnych w przestrzeni, gdzie tworzą pole.

Pole – zbiór wartości wielkości fizycznych danego rodzaju przypisanych punktom przestrzeni (np. pole temperatury, pole prędkości itp.).

Bilansowania globalnych wielkości fizycznych dokonujemy w **obszarze bilansowania** (obszarze o dowolnym kształcie myślowo wyodrębnionym z otaczającej nas przestrzeni fizycznej i całkowicie wypełnionym materią).

W zagadnieniach fizyki budowli wykorzystuje się **obszar kontrolny** Ω (ustalony i nieruchomy względem przyjętego układu odniesienia)

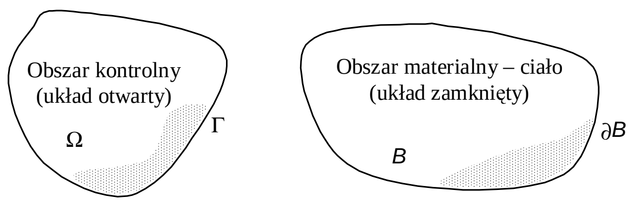
Zamkniętą powierzchnię ograniczającą ten obszar (oddzielającą go od otoczenia) nazywamy jego **brzegiem** Γ.

Pozostałą część przestrzeni nazywamy **otoczeniem** obszaru kontrolnego Ω^*.

Z punktu widzenia termodynamiki obszar kontrolny jest **układem otwartym** (wymieniający z otoczeniem energię i materię).

W przypadku zagadnień mechaniki wykorzystuje się **obszar materialny** (**ciało**) B o **brzegu** ∂B.

Z punktu widzenia termodynamiki jest to **układ zamknięty** (wymieniający z otoczeniem tylko energię).



Rys. 1.2. Obszar kontrolny i obszar materialny

1.1. OGÓLNE RÓWNANIE BILANSU

Zmiana zasobu (**akumulacja**) przypisanej ośrodkowi materialnemu **dowolnej** globalnej **wielkości fizycznej** $\Psi(t)$ może być spowodowana:

- **wymianą** (**przepływem**) Ψ między obszarem Ω a jego otoczeniem Ω^* (ujmującą **wpływ** bądź też **wypływ** Ψ);
- **produkcją** Ψ w obszarze Ω (wyrażającą fakt **powstawania** lub **zanikania** Ψ wewnątrz Ω).

Powyższy aksjomat bilansowy zapisujemy w postaci **ogólnego równania bilansu** wielkości Ψ

$$\boxed{\frac{d\Psi}{dt} = \Phi_\Psi + \Sigma_\Psi}$$

$d\Psi/dt$ – szybkość zmiany zasobu (akumulacji) Ψ
$\Phi_\Psi(t)$ – przepływ Ψ
$\Sigma_\Psi(t)$ – źródło Ψ

Gdy $d\Psi/dt > 0$ zasób Ψ rośnie, gdy $d\Psi/dt < 0$ – maleje.

Powyższe równanie jest **niezależne** od **rodzaju** Ψ i od rodzaju **ośrodka materialnego**.

1.2. CAŁKOWE (GLOBALNE) RÓWNANIE BILANSU

Dzieląc myślowo obszar Ω na **elementarne** (**infinitezymalne, nieskończenie małe**) **podobszary** o **ob-**

jętości dV zaś jego brzeg na **elementarne powierzchnie** o **polu** dA mażemy napisać, że

$$
\begin{aligned}
d\Psi &= \psi\, dV \\
d\Phi_\psi &= \varphi_\psi\, dA \\
d\Sigma_\psi &= \sigma_\psi\, dV
\end{aligned}
$$

$\psi(\mathbf{x},t)$ – **gęstość** (objętościowa) Ψ,
$\varphi_\psi(\mathbf{x},t)$ – **gęstość** (powierzchniowa) **przepływu** (**strumień**) Ψ,
$\sigma_\psi(\mathbf{x},t)$ – **gęstość** (objętościowa) **źródła** Ψ,
$\mathbf{x}$ – **położenie** (punkt przestrzeni),
t – **czas**.

Wszystkie wielkości nieskończenie małe rozumiane są w sensie zdefiniowanym w analizie **niestandardowej**, czyli jako wielkości stałe, dowolnie bliskie zeru (a więc tak, jak rozumiał je **LEIBNITZ**).

Całkując powyższe zależności odpowiednio po obszarze Ω i jego brzegu Γ dostajemy

$$
\begin{aligned}
\Psi &= \int_\Omega \psi dV \\
\Phi_\psi &= \int_\Gamma \varphi_\psi dA \\
\Sigma_\psi &= \int_\Omega \sigma_\psi dV
\end{aligned}
$$

Podstawiając powyższe całki do ogólnego równania bilansu dostajemy

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\psi dV = \int_{\Omega}\frac{\partial\psi}{\partial t}dV = \int_{\Gamma}\varphi_{\psi}dA + \int_{\Omega}\sigma_{\psi}dV$$

Strumień wielkości bilansowanej można przedstawić w postaci

$$\varphi_{\psi} = -\boldsymbol{\varphi}_{\psi}\cdot\mathbf{n}$$

$\boldsymbol{\varphi}_{\psi}(\mathbf{x},t)$ **– wektor gęstości strumienia** Ψ,
$\mathbf{n}$ – **wektor normalny** do brzegu Γ.

Gdy $\boldsymbol{\varphi}_{\psi}\cdot\mathbf{n} < 0$ to następuje **wpływ** Ψ do Ω, gdy $\boldsymbol{\varphi}_{\psi}\cdot\mathbf{n} > 0$ ma miejsce **wypływ** Ψ do otoczenia, natomiast gdy $\boldsymbol{\varphi}_{\psi}\cdot\mathbf{n} = 0$ przepływ zanika.

Tak zdefiniowany strumień pozwala zapisać powyższe równanie w postaci

$$\int_{\Omega}\frac{\partial\psi}{\partial t}dV = -\int_{\Gamma}\boldsymbol{\varphi}_{\psi}\cdot\mathbf{n}dA + \int_{\Omega}\sigma_{\psi}dV$$

Z fizycznego punktu widzenia, wektor $\boldsymbol{\varphi}_{\psi}$ możemy przedstawić w postaci sumy

$$\boldsymbol{\varphi}_{\psi} = \psi\mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi}_{\psi}^{mo}$$

$\psi\mathbf{v}$ – **wektor** gęstości **makroskopowego strumienia** Ψ,
$\boldsymbol{\varphi}_{\psi}^{mo}$ – **wektor** gęstości **molekularnego strumienia** Ψ (ruch cieplny),
$\mathbf{v}$ – **wektor prędkości** przepływu Ψ.

Fizyka pozwala także wyrazić gęstość źródła σ_ψ jako

$$\sigma_\psi = \sigma_\psi^{ex} + \sigma_\psi^{in}$$

σ_ψ^{ex} – **gęstość zewnętrznego źródła** Ψ (pole grawitacyjne, pole elektromagnetyczne),

σ_ψ^{in} – **gęstość wewnętrznego źródła** Ψ (reakcje chemiczne, przemiany fazowe itp.).

Podstawiając tak zdefiniowane zależności do powyższego równania otrzymujemy **całkowe** (**globalne**) **równania bilansu** wielkości Ψ

$$\boxed{\int_\Omega \frac{\partial \psi}{\partial t}\, dV = -\int_\Gamma \left(\psi \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi}_\psi^{mo}\right) \cdot \mathbf{n} dA + \int_\Omega \left(\sigma_\psi^{ex} + \sigma_\psi^{in}\right) dV}$$

1.3. RÓŻNICZKOWE RÓWNANIE BILANSU

Z twierdzenia o dywergencji wynika, że

$$\int_\Gamma \boldsymbol{\varphi}_\psi \cdot \mathbf{n}\, dA = \int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_\psi\, dV$$

∇ – **operator** wektorowy **nabla**

Pozwala to zapisać powyższe równanie bilansu w postaci

$$\int_\Omega \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\psi \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi}_\psi^{mo}\right) - \sigma_\psi^{ex} - \sigma_\psi^{in} \right] dV = 0$$

Z powyższego równania dostajemy **różniczkowe** (**lokalne**) **równanie bilansu** wielkości ψ

$$\boxed{\frac{\partial \psi}{\partial t} + \nabla \cdot \psi \mathbf{v} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\psi}^{mo} + \sigma_{\psi}^{ex} + \sigma_{\psi}^{in}}$$

W powyższym równaniu należy określić postać ψ, $\boldsymbol{\varphi}_{\psi}^{mo}$, σ_{ψ}^{in} oraz σ_{ψ}^{ex}.

Jeśli ψ jest skalarem, to σ_{ψ}^{in} oraz σ_{ψ}^{ex} są również skalarami, a $\boldsymbol{\varphi}_{\psi}^{mo}$ jest wektorem.

Jeśli ψ jest wektorem, to σ_{ψ}^{in} oraz σ_{ψ}^{ex} są również wektorami, a $\boldsymbol{\varphi}_{\psi}^{mo}$ jest tensorem.

W przypadku procesów **stacjonarnych** albo **ustalonych**

$$\partial \psi / \partial t = 0$$

i powyższe równanie przyjmuje postać

$$\nabla \cdot \left(\psi \mathbf{v} + \boldsymbol{\varphi}_{\psi}^{mo} \right) = \sigma_{\psi}^{ex} + \sigma_{\psi}^{in}$$

1.4. WIELKOŚCI ZACHOWAWCZE

Bilansowana wielkość **zachowawcza**, czyli spełniająca **zasadę zachowania** (np. masa, czy też energia), nie może ani powstawać, ani znikać w żadnej dowolnie małej części ośrodka materialnego.

Wynika z tego, że w każdym punkcie obszaru Ω

$$\sigma_\psi = 0$$

Zasada zachowania ma charakter **lokalny**; nie dopuszcza możliwości powstawania (źródło dodatnie) i zanikania (źródło ujemne) wielkości bilansowanej w różnych punktach rozpatrywanego obszaru, przy znikaniu jej źródła globalnego Σ_ψ.

Jedyną możliwą przyczyną zmiany zasobu wielkości zachowawczej w obszarze bilansowania jest jej wymiana z otoczeniem.

1.5. RÓWNANIA FIZYCZNE

Występujący w równaniach bilansowych wektor $\boldsymbol{\varphi}_\psi^{mo}$ musi być określony dodatkowymi zależnościami, zwanymi **równaniami materiałowymi**, **fizycznymi** bądź też **konstytutywnymi.**

Równania fizyczne (np. prawo **FOURIERA**, czy też **FICKA**) zależą od rodzaju materiału, z którego zbudowany jest rozważany ośrodek materialny i muszą być wyznaczone **eksperymentalnie** (co jest zazwyczaj trudne i kosztowne).

W najprostszym przypadku **równanie fizyczne** możemy przyjąć w następującej, ogólnej postaci:

$$\boldsymbol{\varphi}_\psi^{mo} = -k_\psi \nabla \psi$$

$\nabla\psi$ – **gradient** wielkości ψ,
k_ψ – **współczynnik materiałowy**.

Z powyższej zależności wynika, że wektor $\boldsymbol{\varphi}_{\psi}^{mo}$ jest skierowany przeciwnie do gradientu $\nabla\psi$ wielkości bilansowanej (np. ciepło płynie przeciwnie do gradientu temperatury, zaś dyfundujące cząsteczki pary wodnej – przeciwnie do gradientu ich koncentracji).

W odróżnieniu od prostej teorii równań bilansowych, teoria równań konstytutywnych jest w przypadku ogólnym złożona i trudna.

1.6. WARUNKI POCZĄTKOWE I BRZEGOWE

Określenie czasoprzestrzennych zmian gęstości ψ wielkości bilansowanej Ψ w obszarze Ω sprowadza się do rozwiązania problemu matematycznego określonego równaniem bilansowym oraz równaniem fizycznym.

Rozwiązanie tego problemu polega na określeniu **postaci funkcji** $\psi(\mathbf{x},t)$, spełniającej dodatkowe warunki początkowe i brzegowe.

Warunek początkowy określa stan rozważanego procesu wewnątrz obszaru Ω w pewnej dowolnie ustalonej chwili czasu t_0 (zazwyczaj przyjmujemy $t_0 = 0$)

$$\psi = \psi_0, \quad t = t_0$$

$\psi_0(x)$ – **zadana funkcja** (np. temperatura początkowa)

Warunek brzegowy charakteryzuje wzajemne oddziaływanie między rozpatrywanym obszarem Ω a ego otoczeniem Ω^* przez brzeg Γ.

Brzeg obszaru traktowany jest jako **powierzchnia geometryczna** (idealna), na której nie może występować ani akumulacja, ani produkcja żadnej bilansowanej wielkości.

Rozróżniamy dwa podstawowe rodzaje warunków brzegowych:

Warunek brzegowy I rodzaju (DIRICHLETA)

$$\psi = \psi_\Gamma, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_\Gamma, \quad t > 0$$

$\psi_\Gamma(x,t)$ – **zadana funkcja** (np. temperatura powierzchni ściany)

Warunek brzegowy II rodzaju (NEUMANNA)

$$\boldsymbol{\varphi}_\psi \cdot \mathbf{n} = \varphi_\Gamma, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_\Gamma, \quad t > 0$$

$\varphi_\Gamma(x,t)$ – **zadana funkcja** (w zagadnieniach fizyki budowli warunek ten praktycznie nie występuje).

Powyższy warunek możemy zapisać w postaci

$$-k_\psi \frac{\partial \psi}{\partial n} = \varphi_\Gamma, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_\Gamma, \quad t > 0$$

$\partial/\partial n$ – **pochodna normalna**.

W przypadku brzegu izolowanego (nie przepuszczającego wielkości bilansowanej) powyższy warunek przyjmuje postać

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_\Gamma, \quad t > 0$$

Jeśli brzeg rozpatrywanego obszaru omywany jest płynem (np. powierzchnia ściany – powietrzem unoszonym w ruchu konwekcyjnym), to warunek brzegowy drugiego rodzaju zapisujemy w postaci **warunku brzegowego III rodzaju**

$$-k_{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial n}=h_a\left(\psi-\psi_a\right),\quad \mathbf{x}=\mathbf{x}_{\Gamma},\quad t>0$$

h_a – **współczynnik przejmowania** wielkości ψ

ψ_a – **funkcja zadana** w otoczeniu obszaru bilansowania (np. temperatura powietrza z dala od powierzchni ściany)

W przypadku przenoszenia wielkości ψ przez **powierzchnię dzielącą** dwa ośrodki materialne A i B, (np. powierzchnię między cegłą a tynkiem), wykorzystuje się **warunek brzegowy IV rodzaju**

$$\psi_A=\psi_B$$

$$k_{\psi A}\frac{\partial\psi_A}{\partial n}=k_{\psi B}\frac{\partial\psi_B}{\partial n},\quad \mathbf{x}=\mathbf{x}_{AB},\quad t>0$$

Sprowadzając wyjściowe **zagadnienie fizyczne** do **zagadnienia matematycznego**, zwanego **zagadnieniem początkowo-brzegowym,** musimy sprecyzować wszystkie informacje umożliwiające jego rozwiązanie, czyli:

- określić obszar bilansowania,
- podać postać równań bilansowych i fizycznych,
- określić warunki początkowe i brzegowe.

Po rozwiązaniu zagadnienia matematycznego możemy określić **przebieg procesów** występujących w rozpatrywanym ośrodku materialnym (np. zmiany temperatury przegrody budowlanej).